Уважаемые студенты!
В период с 16 марта по 25 апреля 2020 года вам необходимо самостоятельно изучить следующий материал и выполнить практические задания.

1. Практические задания нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета.
2. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Подготовить реферат на тему:
«Численные методы алгебры»
6. Подготовить презентацию на тему:
«История комбинаторики»

Презентацию, реферат и практические задания отправлять на электронный адрес: albina.polyanceva@mail.ru

Теоретический материал

1.События и их классификация. Классическое и статистическое определение вероятности случайного события.
Основной источник (Григорьев; С.Иволгин «Математика». Учебник»Academia , Москва, 2015г.): с.276 п.7.1.1.- 7.1.4.
2.Комбинаторика. Выборки элементов.
Основной источник: с.281 п.7.2.1.- 7.2.3.
3.Сумма и произведение событий. Вероятность появления хотя бы одного события.
Основной источник: с.285 п.7.3.1.- 7.3.4.
4.Формула полной вероятности. Формула Бейеса.
Основной источник: с.293 п.7.4.1.- 7.4.2.

Практические задания

Решить задачи

1.с.284.№1-№8
2.с.291 №1-№20
3.с.297 №1-№ 30

Методические рекомендации к написанию реферата

Реферат необходимо сдать в печатном или электронном виде на листе формата А4, выполненном шрифтом Times New Roman 14 пунктов.

Требования, предъявляемые к реферату:

Реферат (доклад) должен быть оформлен в MS Word, шрифт текста Times New Roman, 14 пт., интервал 1.

1. Титульный лист (см. приложение 1)
2. Содержание (см. приложение 2)
3. Введение
4. Основная часть реферата
5. Заключение
6. Список используемой литературы (см. приложение 3)

Если возникнут затруднения в процессе работы, обратитесь к преподавателю.

Критерии оценки:

1. Вы правильно выполнили задание. Работа выполнена аккуратно – 5(отлично).
2. Вы не смогли выполнить 2-3 элемента. Работа выполнена аккуратно- 4(хорошо).
3. Работа выполнена неаккуратно, технологически неправильно – 3(удовлетворительно).

О теории вероятностей

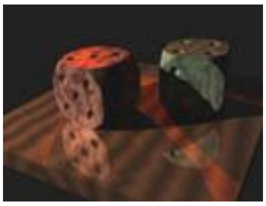
Человечество всегда стремилось к некоторого рода предсказаниям. Любая наука основана на этом. Однако предвидение фактов не может быть абсолютным, каким

бы обоснованным оно не казалось. У нас не может быть абсолютной уверенности в том, что наше предвидение не будет опровергнуто опытом.

Допустим, что некоторый простой закон подтверждается для большого числа случаев. Является ли это просто случайным совпадением, или все-таки это - закономерность? Получается, что ученый часто находится в положении игрока; опираясь на метод индукции, он сознательно или не очень вычисляет вероятность.

История теории вероятности содержит очень много неожиданных парадоксов. По мнению Карла Пирсона, в математике нет другого такого раздела науки, в котором так же легко совершить ошибку. Даже само высказывание "вычислить вероятность" содержит парадокс. Ведь вероятность, в противоположность

достоверности, есть то, чего не знают. Как же можно вычислять то, о чем нет никаких знаний?
Пользуясь классическим определением, можно сказать, что вероятность - это отношение числа случаев, благоприятствующих изучаемому событию, к полному числу возможных случаев. Однако это определение весьма неполно, что может подтвердить простой пример. Давайте посчитаем вероятность того, что при бросании двух игральных костей по крайней мере на одной выпадет 6. Очевидно, что каждая кость может выпасть шестью различными способами. Число всех возможных случаев равно 6*6 = 36; число благоприятствующих случаев равно 11 (6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6, 5-6, 4-6, 3-6, 2-6, 1-6). Таким образом, вероятность равна 11/36. Мы знаем, что это правильное решение.



Но ведь можно рассуждать и по-другому. Числа очков, выпавшие на обеих костях, могут образовать 6*7/2 = 21 различных комбинаций. 6 из них благоприятствующие (6-6, 6-5, 6-4, 6-3, 6-2, 6-1). Вероятность равна 6/21. Этот результат явно отличается от предыдущего. Однако пользуясь нашим определением, мы не сможем найти ошибку.
Таким образом, придется дополнить определение: вероятность - это отношение числа случаев, благоприятствующих изучаемому событию, к полному числу возможных случаев, при условии, что эти случаи равновероятны. И вот мы определили вероятное при помощи вероятного.
Но как узнать, равновероятны ли два возможных случая? Не является ли это результатом некоторого условного соглашения? Если мы явно укажем условное соглашение перед вычислениями, то все будет хорошо. Но как мы применим результат на практике? Ведь тогда придется доказать состоятельность данного соглашения.
Некоторые могут предположить, что простого здравого смысла достаточно, чтобы указать верное соглашение. Но описанные далее парадоксы противоречат, казалось бы, всякому здравому смыслу.
Тем не менее без теории вероятности не сможет существовать наука как таковая, ведь без нее мы не сможем ни открыть какой-нибудь закон, ни применять его.

Исторические сведения

Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам и первым попыткам математического анализа азартных игр (орлянка, кости, рулетка). Первоначально её основные понятия не имели строго математического вида, к ним можно было относиться как к некоторым эмпирическим фактам, как к свойствам реальных событий, и они формулировались в наглядных представлениях. Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся к XVII веку. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, Блез Паскаль и Пьер Ферма открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей. [1]
Важный вклад в теорию вероятностей внёс Якоб Бернулли: он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений; Лаплас и Пуассон доказали первые

предельные теоремы. Во второй половине XIX века основной вклад внесли русские учёные П. Л. Чебышёв, А. А. Марков и А. М. Ляпунов. В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также разработана теория цепей Маркова. Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной Андреем Николаевичем Колмогоровым. В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики.

3. **Повторение и обобщение материала**.

Принцип умножения

Пусть необходимо выполнить одно за другим одновременно r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе - n_2 способами и т.д. до r - того действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе можно выполнить $n_1, n_2 \dots n_r$ способами.

Пример: Сколько существует двузначных чисел?

Способ 1: (принцип умножения)

Выбирается две цифры, поэтому r= 2. Первая цифра может быть любой, кроме 0. Потому n_1= 9. Вторая цифра может быть любой, т.е. n_2=10. итак двузначных чисел: $n_1n_2=9\cdot10=90$.

Способ 2. (перобора)

10 20 30 ………..90

11 21 31 …………91 прямоугольная таблица $10\cdot9=90$

12 22 32 …………92

………………………….

19 29 39 ………...99

Пример: Бросают три игральные кости и наблюдают за числом очков, появившихся на каждой кости. Сколько различных исходов опыта возможно?

Решение: Бросают три игральные кости, поэтому по принципу умножения r= 3, На выпавшей грани "первой" игральной кости может появиться одно очко, два очка, ... шесть очков. Поэтому n_1= 6. Аналогично n_2= 6, n_3= 6. Итак, число всех исходов опыта $n_1n_2n_3= 6\cdot6\cdot6=216$.

Пример: Сколько существует нечетных трехзначных чисел?

Решение: По принципу умножения r = 3 ; n_1 = 9, т.к. первая цифра может быть любой, кроме 0; n_2 = 10, т. к. вторая цифра может быть любой ; n_3 = 5, т.к. третья цифра должна быть нечетной. Итак, всех возможностей

$n_1n_2n_3 =9\cdot10\cdot5=450$.

Замечания к принципу умножения. Если на выполнение какого-либо из r действий наложено ограничение, то подсчет удобнее начинать с выполнения именно этого действия.

Пример: В машине 7 мест, одно место водителя. Сколькими способами могут сесть в машину 7 человек, если место водителя могут занять только трое из них?

Решение: По принципу умножения r = 7. Начнем с места водителя n_1 = 3, следующее место может занять любой из 6 оставшихся человек, т.е. n_2 = 6, следующее место может занять любой из 5 оставшихся человек и т.д. Поэтому n_3 = 5, n_4 = 4, n_5 = 3, n_6= 2, n_7 = 1.

Итак, всех возможностей: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 \cdot n_7 = 3\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 2160$.

Размещения (упорядоченные выборки).

Пусть A – множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Определение</u>: Упорядоченные наборы, состоящие из r элементов множество A, будем называть размещениями из n элементов множества A по r элементов.

– число размещений из n элементов по r элементов(r n). Вычислим по принципу умножения:
$n_1 = n$,
$n_2 = n-1$, $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$.
$n_3 = n-2$,
…………
$n_r = n-(r-1) = n-r+1$.
Здесь n, n-1, n-2,…,n-r+1 есть число возможностей для выбора первого, второго, третьего,… r – того элементов.

Перестановки

<u>Определение</u>: Размещения из n элементов по n элементов называются перестановки из n элементов.
P_n – число перестановок из n элементов.

<u>Пример</u>: Сколькими способами могут 4 человека разместиться в 4-х местном купе железнодорожного вагона?
<u>Решение</u>: A = {1, 2, 3, 4} (4 места в купе вагона);
$P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$.

Сочетания (неупорядоченные выборки)

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$
<u>Определение</u>: Неупорядоченные наборы, состоящие из r элементов множества A, называются сочетаниями из n элементов по r элементов. (r n).

<u>Пример</u>: Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание, если в один день нельзя сдать более одного экзамена?
<u>Решение</u>: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (10 дней). Поскольку в расписании учитывается порядок экзаменов, то мы имеем дело с упорядоченными выборками, т.е. с размещениями.
<u>Пример</u>: Подрядчику нужны 4 плотника, к нему с предложениями своих услуг обратилось 10 человек. Сколькими способами можно набрать рабочую силу?
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (плотники).

<u>Пример</u>. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 10 команд. Известно, что те, кто займет первые 3 места, получают золотую, серебряную и бронзовую медали, а последние двое выбывают. Сколько различных результатов первенства может быть?

<u>Решение</u>: Нужно выполнить одно за другими два действия:

I. Из десяти команд выбрать три на три первых места.
II. После выполнения первого действия из оставшихся семи команд выбрать две на два последних места.

Итак, по принципу умножения r = 2 ;

n_1==1098=720; n_2===21.

Различных результатов первенства может быть:

n_1n_2= 720 · 21=15120.

События

***Событие в теории вероятностей** – это множество, состоящее из элементарных событий.*

События обычно имеют свои словесные описания. Например, при бросании двух игральных костей можно рассматривать событие А, состоящее в суммарном выпадении четного числа очков, а при вытаскивании игральной карты из колоды событием является выпадение карты бубновой масти. Все эти события состоят из элементарных событий. Так, при бросании игральных костей событие А состоит из элементарных событий {1,1}, {1,3}, {1,5}, {2,2}, {2,4}, {2,6}, {3,1} {3,3}, {3,5}, {4,2}, {4,4}, {4,6}, {5,1}, {5,3}, {5,5}, {6,2}, {6,4}, {6,6}.

***Достоверным событием** называется событие, состоящее из всех элементарных событий.*

Достоверное событие происходит всегда, поскольку в результате случайного выбора какое-то элементарное событие всегда реализуется. Обозначим достоверное событие буквой Ώ.

***Невозможным событием** называется событие, которое не может произойти никогда.*

Обозначим его *V*. Оно представляет собой пустое множество элементарных событий.

***Противоположным событию А Ώ событием** называется событие , состоящее в том, что событие А не произошло.*

состоит из элементарных событий, не входящих в *А*.

***Суммой (или объединением) событий А и В** называется событие А + В, состоящее в том, что из двух событий А и В происходит по крайней мере одно (либо А, либо В, либо А и В вместе).*

Этому событию соответствует множество элементарных событий А В. Поэтому, иногда мы будем использовать знак объединения, вместо знака суммирования.

Пример. По мишени стреляют 3 раза. События *А, В, С* – попадание при 1-ом, 2-ом и 3 выстрелах соответственно. Сумма событий *А, В и С* означает хотя бы одно попадание.

Классическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт может приводить лишь к одному из конечного множества результатов. Эти результаты будем называть <u>элементарными исходами</u>.

Предположим, что элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

1. образуют полную группу, т.е. в каждом испытании обязан появиться какой-нибудь из этих исходов;
2. попарно несовместны, т.е. два различных элементарных исхода не могут появиться в одном испытании;
3. равновозможные, т.е. шансы на появление у всех элементарных исходов одинаковы.

В этих условиях может использоваться классическое определение вероятности.

<u>**Определение**</u>: Элементарные исходы, в которых появляются интересующее нас событие, называются ***благоприятными*** этому событию.

<u>**Определение**</u>: ***Вероятностью события А*** называются число Р(А), равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих событию А к общему числу исходов:

где n – общее число исходов испытания, m – число исходов, благоприятствующих событию А.

<u>**Пример**</u>: Бросается один раз игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

<u>**Решение**</u>: Опыт состоит в бросании игральной кости 1 раз и наблюдении за числом очков, появившихся на верхней грани.

Все исходы опыта: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Число всех исходов: n = 6.

Рассмотрим событие А – выпало нечетное число очков. Исходы благоприятствующие А: 1, 3, 5.

Число исходов, благоприятствующих А : m = 3

.

<u>**Пример**</u>: Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?

<u>**Решение**</u>: Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв.

Число всех исходов: $n = P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Рассмотрим событие А – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т.е. m=1.

Найдем вероятность события А: Р(А)=.

<u>**Пример**</u>: В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.

<u>**Решение**</u>: Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из 20. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей (находящихся в ящике) по 5.

Число всех исходов опыта n==

Рассмотрим событие А – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две бракованные.

Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные 3 небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих событию А, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать 2 детали и затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить n_1=второе действие можно выполнить n_2= способами. Итак, $m=n_1 \cdot n_2$= .
Найдем вероятность события А:

Задачи на классическое определение вероятности

Буквой *А* обозначаем событие, фигурирующее в условии задачи.

Задача. Корреспонденция разносится в *5* адресов. Разносчик забыл дома очки и разнес корреспонденцию случайным образом. Какова вероятность того, что вся корреспонденция попала к своим адресатам?
Решение. Элементарным событием является перестановка из *5* адресов. Их число равно По смыслу задачи все они равновероятны. Поэтому *P(A)= 1/120.*

Задача. Цифры *0,1,2,3* написаны на четырех карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?
Решение. Элементарным событием является перестановка из 4 карточек. Их всего 4!. Поскольку четырехзначное число не может начинаться с нуля, то событие *А* состоит из тех перестановок, которые начинаются с карточки с не равной нулю цифрой. Их всего *4!-3!=18*. Поэтому *P(A)= 18/4! =18/24=3/4.*

Задача. В хоккейном турнире участвуют 6 равных по силе команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. У Вас есть любимая команда. Вы пришли «поболеть» на турнир на одну из игр, выбранных случайно. Какова вероятность того, что в этой игре будет играть Ваша любимая команда?
Решение. Общее число проведенных игр равно $C_6^2=15$. Любимая команда участвует в *5* играх из *15*. Поэтому *P(A)= 5/15 = 1/3.*

Задача. В ящике разложено *20* деталей. Известно, что *5* из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет *3* детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?
Решение. Элементарным событием является сочетание из *20* деталей по *3*. Количество таких сочетаний равно C_{20}^3. В соответствии с решением задачи *11*, число сочетаний, содержащих хотя бы одну стандартную деталь равно C_{20}^3-$C_{15}^3=685$. Поэтому *P(A)=*
Задача. Из *7* карточек разрезной азбуки составлено слово *колокол*. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *колокол***?**
Решение. На карточках имеется *3* буквы *о, 2* буквы *к, 2* буквы *л*. Поэтому, первая буква слова *колокол* может быть выбрана двумя способами, вторая – 3 способами, третья – 2 способами. При уже выбранных первых трех буквах четвертая буква может быть выбрана еще 2 способами (поскольку одна буква *о* уже выбрана). Остальные буквы могут быть выбраны только одним способом. Таким образом (см.

решение задачи 12), число перестановок карточек, реализующих слово *колокол* равно произведению чисел *3, 2, 2, 2* т.е. равен *24*. Общее число перестановок карточек равно *7!*.Поэтому *P(A)*=

Формула полной вероятности и формулы Байеса

На данном уроке мы рассмотрим важное следствие **теорем сложения и умножения вероятностей** и научимся решать типовые задачи по теме.

Рассмотрим **зависимое событие** A, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных ***гипотез*** $B_1, B_2, B_3, .., B_n$, которые образуют **полную группу**. Пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), .., P_{B_n}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) + ... + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Эта формула получила название **формулы полной вероятности**. В учебниках она формулируется теоремой, доказательство которой элементарно: согласно **алгебре событий**, $A = B_1A + B_2A + B_3A + ... + B_nA$ *(произошло событие* B_1 ***и*** *после него наступило событие* A ***или*** *произошло событие* B_2 ***и*** *после него наступило событие* A ***или*** *произошло событие* B_3 ***и*** *после него наступило событие* A ***или*** *….* ***или*** *произошло событие* B_n ***и*** *после него наступило событие* A*)*. Поскольку гипотезы $B_1, B_2, B_3, .., B_n$ несовместны, а событие A – зависимо, то по **теореме сложения вероятностей несовместных событий** *(первый шаг)* и **теореме умножения вероятностей зависимых событий** *(второй шаг)*:

$$P(A) = P(B_1A + B_2A + B_3A + ... + B_nA) =$$
$$= P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) + ... + P(B_nA) =$$
$$= P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) + ... + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Наверное, многие предчувствуют содержание первого примера =)

Задача 1

Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

Решение: рассмотрим событие A – из наугад выбранной урны будет извлечён чёрный шар. Данное событие может произойти или не произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:

B_1 – будет выбрана 1-я урна;

B_2 – будет выбрана 2-я урна;

B_3 – будет выбрана 3-я урна.

Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн **равновозможен**, следовательно:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

Обратите внимание, что перечисленные гипотезы образуют **полную группу событий**, то есть, по условию чёрный шар может появиться только из этих урн, а например, не прилететь с бильярдного стола. Проведём простую промежуточную проверку:

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, ОК, едем дальше:

В первой урне 4 белых + 7 черных = 11 шаров, по **классическому определению**:

$P_{B_1}(A) = \frac{7}{11}$ – вероятность извлечения чёрного шара **при условии**, что будет выбрана 1-я урна.

Во второй урне только белые шары, поэтому **в случае её выбора** появление чёрного шара становится *невозможным*: $P_{B_2}(A) = 0$.

И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая **условная вероятность** извлечения чёрного шара составит $P_{B_3}(A) = 1$ *(событие достоверно)*.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{33} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$ – вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.

Ответ: $\frac{6}{11}$

Разобранный пример снова наводит на мысль о том, как важно ВНИКАТЬ В УСЛОВИЕ. Возьмём те же задачи с урнами и шарами – при их внешней схожести способы решения могут быть совершенно разными: где-то требуется применить только **классическое определение вероятности**, где-то события **независимы**, где-то **зависимы**, а где-то речь о гипотезах. При этом не существует чёткого формального критерия для выбора пути решения – над ним почти всегда нужно думать. Как повысить свою квалификацию? Решаем, решаем и ещё раз решаем!

Задача 2

В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попадания в мишень для данного стрелка соответственно равны 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из случайно выбранной винтовки?

Краткое решение и ответ в конце урока.

В большинстве тематических задач гипотезы, конечно же, не равновероятны:

Задача 3

В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Решение: в этой задаче количество винтовок точно такое же, как и в предыдущей, но вот гипотезы всего две:

B_1 – стрелок выберет винтовку с оптическим прицелом;

B_2 – стрелок выберет винтовку без оптического прицела.

По **классическому определению вероятности**: $P(B_1)=\frac{3}{5}=0,6;\quad P(B_2)=\frac{2}{5}=0,4$.

Контроль: $P(B_1)+P(B_2)=0,6+0,4=1$

Рассмотрим событие: A – стрелок поразит мишень из наугад взятой винтовки.

По условию: $P_{B_1}(A)=0,95;\quad P_{B_2}(A)=0,7$.

По формуле полной вероятности:
$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0,6\cdot 0,95+0,4\cdot 0,7=0,57+0,28=0,85$

Ответ: 0,85

На практике вполне допустим укороченный способ оформления задачи, который вам тоже хорошо знаком:

Решение: по классическому определению: $p_1=\frac{3}{5}=0,6;\quad p_2=\frac{2}{5}=0,4$ – вероятности выбора винтовки с оптическим и без оптического прицела соответственно.

По условию, $\tilde{p}_1=0,95;\quad \tilde{p}_2=0,7$ – вероятности попадания в мишень из соответствующих типов винтовок.

По формуле полной вероятности:
$p=p_1\tilde{p}_1+p_2\tilde{p}_2=0,6\cdot 0,95+0,4\cdot 0,7=0,57+0,28=0,85$ – вероятность того, что стрелок поразит мишень из наугад выбранной винтовки.

Ответ: 0,85

Следующая задача для самостоятельного решения:

Задача 4

Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

На всякий случай напомню – чтобы получить значения вероятностей проценты нужно разделить на 100. Будьте очень внимательны! По моим наблюдениям, условия задач на формулу полной вероятности частенько пытаются подзапутать; и я специально подобрал такой пример. Скажу по секрету – сам чуть не запутался =)

Решение в конце урока (оформлено коротким способом)

Задачи на формулы Бейеса

Материал тесно связан с содержанием предыдущего параграфа. Пусть событие A наступило в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, .., B_n$. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

При условии, что событие A **уже произошло**, вероятности гипотез *переоцениваются* по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

…

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

$P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ – это *априорные* (оцененные **до** испытания) вероятности.

$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), .., P_A(B_n)$ –
это *апостериорные* (оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами » – с учётом того факта, что событие A **достоверно произошло**.

Рассмотрим это различие на конкретном примере:

Задача 5

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Первая часть **решения** состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание ещё не произведено и событие *«изделие оказалось стандартным»* пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:

B_1 – наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;

B_2 – наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По **классическому определению**:

$P(B_1)=\frac{4000}{10000}=0{,}4;\quad P(B_2)=\frac{6000}{10000}=0{,}6$.

Контроль: $P(B_1)+P(B_2)=0{,}4+0{,}6=1$

Рассмотрим зависимое событие: A – наудачу взятое со склада изделие будет стандартным.

В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий, поэтому: $P_{B_1}(A)=\frac{80}{100}=0{,}8$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 1-й партии.

Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и $P_{B_2}(A)=\frac{90}{100}=0{,}9$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 2-й партии.

По формуле полной вероятности:
$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}9=0{,}32+0{,}54=0{,}86$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие A **произошло**.

По формулам Бейеса:

а) $P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}8}{0{,}86}=\frac{0{,}32}{0{,}86}=\frac{32}{86}=\frac{16}{43}\approx 0{,}37$ – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б) $P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}9}{0{,}86}=\frac{0{,}54}{0{,}86}=\frac{54}{86}=\frac{27}{43}\approx 0{,}63$ – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.

После *переоценки* гипотезы B_1, B_2, разумеется, по-прежнему образуют **полную группу**:

$P_A(B_1)+P_A(B_2)=\frac{16}{43}+\frac{27}{43}=\frac{43}{43}=1$ *(проверка ;-))*

Ответ: а) $\frac{16}{43} \approx 0,37$; б) $\frac{27}{43} \approx 0,63$

Понять смысл переоценки гипотез нам поможет Иван Васильевич, которой снова сменил профессию и стал директором завода. Он знает, что сегодня 1-й цех отгрузил на склад 4000, а 2-й цех – 6000 изделий, и приходит удостовериться в этом. Предположим, вся продукция однотипна и находится в одном контейнере. Естественно, Иван Васильевич предварительно подсчитал, что изделие, которое он сейчас извлечёт для проверки, с вероятностью $P(B_1) = 0,4$ будет выпущено 1-м цехом и с вероятностью $P(B_2) = 0,6$ – вторым. Но после того как выбранное изделие оказывается стандартным, он восклицает: «Какой же классный болт! – его скорее выпустил 2-й цех». Таким образом, вероятность второй гипотезы переоценивается в лучшую сторону $P_A(B_2) \approx 0,63$, а вероятность первой гипотезы занижается: $P_A(B_1) \approx 0,37$. И эта переоценка небезосновательна – ведь 2-й цех произвёл не только больше изделий, но и работает в 2 раза лучше!

Вы скажете, чистый субъективизм? Отчасти – да, более того, сам Байес интерпретировал *апостериорные* вероятности как **уровень доверия**. Однако не всё так просто – в байесовском подходе есть и объективное зерно. Ведь вероятности того, что изделие будет стандартным *(0,8 и 0,9 для 1-го и 2-го цехов соответственно)* это **предварительные** (априорные) и **средние** оценки. Но, выражаясь философски – всё течёт, всё меняется, и вероятности в том числе. Вполне возможно, что **на момент исследования** более успешный 2-й цех повысил процент выпуска стандартных изделий *(и/или 1-й цех снизил)*, и если проверить бОльшее количество либо все 10 тысяч изделий на складе, то переоцененные значения $P_A(B_1) \approx 0,37$; $P_A(B_2) \approx 0,63$ окажутся гораздо ближе к истине.

Кстати, если Иван Васильевич извлечёт нестандартную деталь, то наоборот – он будет больше «подозревать» 1-й цех и меньше – второй. Предлагаю убедиться в этом самостоятельно:

<u>Задача 6</u>

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 20%, во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось **не**стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Условие отличатся двумя буквами, которые я выделил жирным шрифтом. Задачу можно решить с «чистого листа», или воспользоваться результатами предыдущих вычислений. В образце я провёл полное решение, но чтобы не возникло формальной накладки с Задачей №5, событие *«наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным»* обозначено через $\overline{A}$.

Бейесовская схема переоценки вероятностей встречается повсеместно, причём её активно эксплуатируют и различного рода мошенники. Рассмотрим ставшее нарицательным АО на три буквы, которое привлекает вклады населения, якобы куда-то их инвестирует, исправно выплачивает дивиденды и т.д. Что происходит? Проходит день за днём, месяц за месяцем и всё новые и новые факты, донесённые путём рекламы и «сарафанным радио», только повышают уровень доверия к финансовой пирамиде *(апостериорная байесовская переоценка в связи с произошедшими событиями!)*. То есть, в глазах вкладчиков происходит постоянное увеличение вероятности того, что *«это серьёзная контора»*; при этом вероятность противоположной гипотезы *(«это очередные кидалы»)*, само собой, уменьшается и уменьшается. Дальнейшее, думаю, понятно. Примечательно, что заработанная репутация даёт организаторам время успешно скрыться от Ивана Васильевича, который остался не только без партии болтов, но и без штанов.

К не менее любопытным примерам мы вернёмся чуть позже, а пока на очереди, пожалуй, самый распространенный случай с тремя гипотезами:

Задача 7

Электролампы изготавливаются на трех заводах. 1-й завод производит 30% общего количества ламп, 2-й – 55%, а 3-й – остальную часть. Продукция 1-го завода содержит 1% бракованных ламп, 2-го – 1,5%, 3-го – 2%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Купленная лампа оказалась с браком. Какова вероятность того, что она произведена 2-м заводом?

Заметьте, что в задачах на формулы Бейеса в условии **обязательно** фигурирует некое **произошедшее** событие, в данном случае – покупка лампы.

Событий прибавилось, и **решение** удобнее оформить в «быстром» стиле.

Алгоритм точно такой же: на первом шаге находим вероятность того, что купленная лампа вообще окажется бракованной.

Пользуясь исходными данными, переводим проценты в вероятности:
$p_1 = \frac{30}{100} = 0{,}3; \quad p_2 = \frac{55}{100} = 0{,}55; \quad p_3 = \frac{(100-30-55)}{100} = \frac{15}{100} = 0{,}15$ – вероятности того, что лампа произведена 1-м, 2-м и 3-м заводами соответственно.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}3 + 0{,}55 + 0{,}15 = 1$

Аналогично: $\tilde{p}_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01; \quad \tilde{p}_2 = \frac{1{,}5}{100} = 0{,}015; \quad \tilde{p}_3 = \frac{2}{100} = 0{,}02$ – вероятности изготовления бракованной лампы для соответствующих заводов.

По формуле полной вероятности:
$$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}55 \cdot 0{,}015 + 0{,}15 \cdot 0{,}02 =$$
$= 0{,}003 + 0{,}00825 + 0{,}003 = 0{,}01425$ – вероятность того, что купленная лампа окажется с браком.

Шаг второй. Пусть купленная лампа оказалась бракованной (событие произошло)

По формуле Бейеса:
$p_2^* = \frac{p_2\tilde{p}_2}{p} = \frac{0{,}00825}{0{,}01425} = \frac{825}{1425} = \frac{11}{19}$ – вероятность того, что купленная бракованная лампа изготовлена вторым заводом

Ответ: $\frac{11}{19} \approx 0{,}5789$

Почему изначальная вероятность 2-й гипотезы $p_2 = 0{,}55$ после переоценки увеличилась $p_2^* \approx 0{,}58$? Ведь второй завод производит средние по качеству лампы (первый – лучше, третий – хуже). Так почему же возросла *апостериорная* вероятность, что бракованная лампа именно со 2-го завода? Это объясняется уже не «репутацией», а размером. Так как завод №2 выпустил самое большое количество ламп, то на него (по меньшей мере, субъективно) и пеняют: *«скорее всего, эта бракованная лампа именно оттуда»*.

Интересно заметить, что вероятности 1-й и 3-й гипотез, переоценились в ожидаемых направлениях и сравнялись:

$$p_1^* = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \frac{0{,}003}{0{,}01425} = \frac{4}{19}; \quad p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{0{,}003}{0{,}01425} = \frac{4}{19} \approx 0{,}2105$$

Контроль: $p_1^* + p_2^* + p_3^* = \frac{4}{19} + \frac{11}{19} + \frac{4}{19} = \frac{19}{19} = 1$, что и требовалось проверить.

К слову, о заниженных и завышенных оценках:

Задача 8

В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

а) он был подготовлен очень хорошо;
б) был подготовлен средне;
в) был подготовлен плохо.

Проведите вычисления и проанализируйте результаты переоценки гипотез.

Задача приближена к реальности и особенно правдоподобна для группы студентов-заочников, где преподаватель практически не знает способностей того или иного студента. При этом результат может послужить причиной довольно-таки неожиданных последствий *(особенно это касается экзаменов в 1-м семестре)*. Если плохо подготовленному студенту посчастливилось с билетом, то преподаватель с большой вероятностью сочтёт его хорошо успевающим или даже сильным студентом, что принесёт неплохие дивиденды в будущем *(естественно, нужно «поднимать планку» и поддерживать свой имидж)*. Если же студент 7 дней и 7 ночей учил, зубрил, повторял, но ему просто не повезло, то дальнейшие события могут развиваться в самом скверном ключе – с многочисленными пересдачами и балансировкой на грани вылета.

Что и говорить, репутация – это важнейший капитал, не случайно многие корпорации носят имена-фамилии своих отцов-основателей, которые руководили делом 100-200 лет назад и прославились своей безупречной репутацией.

Да, байесовский подход в известной степени субъективен, но… так устроена жизнь!

Закрепим материал заключительным индустриальным примером, в котором я расскажу о до сих пор не встречавшихся технических тонкостях решения:

Задача 9

Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит в 2 раза больше деталей, чем второй цех, и в 4 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 12%, во втором – 8%, в третьем – 4%. Для контроля из контейнера берется одна деталь. Какова вероятность того, что она окажется бракованной? Какова вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех?

Таки Иван Васильевич снова на коне =) Должен же быть у фильма счастливый конец =)

Решение: в отличие от Задач №№5-8 здесь в явном виде задан вопрос, который разрешается с помощью формулы полной вероятности. Но с другой стороны, условие немного «зашифровано», и разгадать этот ребус нам поможет школьный навык составлять простейшие уравнения. За «икс» удобно принять наименьшее значение:

Пусть x – доля деталей, выпускаемая третьим цехом.

По условию, первый цех производит в 4 раза больше третьего цеха, поэтому доля 1-го цеха составляет $4x$.

Кроме того, первый цех производит изделий в 2 раза больше, чем второй цех, а значит, доля последнего: $\frac{4x}{2} = 2x$.

Составим и решим уравнение:

$4x + 2x + x = 1$

$7x = 1$

$x = \frac{1}{7}$

Таким образом: $p_1 = 4x = \frac{4}{7}, \quad p_2 = 2x = \frac{2}{7}, \quad p_3 = x = \frac{1}{7}$ – вероятности того, что извлечённая из контейнера деталь выпущена 1-м, 2-м и 3-м цехами соответственно.

Контроль: $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 1$. Кроме того, будет не лишним ещё раз посмотреть на фразу *«Известно, что первый цех производит изделий в 2 раза больше второго цеха и в 4 раза больше третьего цеха»* и убедиться, что полученные значения вероятностей действительно соответствуют этому условию.

За «икс» изначально можно было принять долю 1-го либо долю 2-го цеха – вероятности выйдут такими же. Но, так или иначе, самый трудный участок пройден, и решение входит в накатанную колею:

Из условия находим:

$\tilde{p}_1 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}, \quad \tilde{p}_2 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \quad \tilde{p}_3 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ – вероятности изготовления бракованной детали для соответствующих цехов.

По формуле полной вероятности: $p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{25} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{25} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{25} =$
$= \frac{12}{175} + \frac{4}{175} + \frac{1}{175} = \frac{17}{175} \approx 0{,}097$ – вероятность того, что наугад извлеченная из контейнера деталь окажется нестандартной.

Вопрос второй: какова вероятность p_3^* того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех? Данный вопрос предполагает, что деталь уже извлечена, и она оказалось бракованной. Переоцениваем гипотезу по формуле Байеса:

$$p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{\frac{1}{175}}{\frac{17}{175}} = \frac{1}{175}\cdot\frac{175}{17} = \frac{1}{17} \approx 0{,}06$$

– искомая вероятность. Совершенно ожидаемо – ведь третий цех производит не только самую малую долю деталей, но и лидирует по качеству!

В данном случае пришлось упрощать четырёхэтажную дробь, что в задачах на формулы Байеса приходится делать довольно часто. Но для данного урока я как-то так случайно подобрал примеры, в которых многие вычисления можно провести без обыкновенных дробей.

Коль скоро в условии нет пунктов «а» и «бэ», то ответ лучше снабдить текстовыми комментариями:

Ответ: $p = \frac{17}{175} \approx 0{,}097$ – вероятность того, что извлечённая из контейнера деталь окажется бракованной; $p_3^* = \frac{1}{17} \approx 0{,}06$ – вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех.

Как видите, задачи на формулу полной вероятности и формулы Бейеса достаточно простЫ, и, наверное, по этой причине в них так часто пытаются затруднить условие, о чём я уже упоминал в начале статьи.

Тема действительно очень интересная – чего только стоит один *парадокс Бейеса*, который обосновывает тот житейский совет, что если у человека диагностирована редкая болезнь, то ему имеет смысл провести повторное и даже два повторных независимых обследования. Казалось бы, это делают исключительно от отчаяния… – а вот и нет! Но не будем о грустном.

Везения в главном!

Решения и ответы:

Задача 2: ***Решение****: рассмотрим гипотезы* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5*, состоящие в том, что стрелок выберет 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю и 5-ю винтовку соответственно. Выбор любой винтовки равновозможен, следовательно:* $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.
Рассмотрим событие A *– стрелок попадёт в мишень из наугад взятой винтовки.*

По условию: $P_{B_1}(A)=0,5;\quad P_{B_2}(A)=0,55;\quad P_{B_3}(A)=0,7;\quad P_{B_4}(A)=0,75;\quad P_{B_5}(A)=0,4$ *.*
По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)+P(B_5)\cdot P_{B_5}(A)=$$

$$=0,2\cdot 0,5+0,2\cdot 0,55+0,2\cdot 0,7+0,2\cdot 0,75+0,2\cdot 0,4=0,1+0,11+0,14+0,15+0,08=0,58$$

***Ответ**: 0,58*

*Задача 4: **Решение**: из условия*
находим $p_1=\frac{10}{100}=0,1;\quad p_2=\frac{70}{100}=0,7;\quad p_3=\frac{20}{100}=0,2$ *– вероятности того, что двигатель работает на холостом ходу, в нормальном и форсированном режимах соответственно.*

По условию $\widetilde{p}_1=0,05;\quad \widetilde{p}_2=0,1;\quad \widetilde{p}_3=0,7$ *– вероятности выхода из строя двигателя для холостого, нормального и форсированного режима соответственно.*
По формуле полной вероятности:

$$p=p_1\widetilde{p}_1+p_2\widetilde{p}_2+p_3\widetilde{p}_3=0,1\cdot 0,05+0,7\cdot 0,1+0,2\cdot 0,7=$$

$=0,005+0,07+0,14=0,215$ *– вероятность того, что двигатель выйдет из строя*

***Ответ**: 0,215*

*Задача 6: **Решение**: рассмотрим две гипотезы:*

B_1 *– наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;*

B_2 *– наудачу взятое изделие принадлежит 2-й партии.*
Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По классическому определению:

$$P(B_1)=\frac{4000}{10000}=0,4;\quad P(B_2)=\frac{6000}{10000}=0,6$$ *.*

Рассмотрим событие: $\overline{A}$ *– наудачу взятое со склада изделие будет нестандартным.*

Из условия находим: $P_{B_1}(\overline{A})=\frac{20}{100}=0,2;\quad P_{B_2}(\overline{A})=\frac{10}{100}=0,1$ *– вероятности того, что изделие из соответствующих партий будет нестандартным.*
По формуле полной вероятности:

$$P(\overline{A})=P(B_1)\cdot P_{B_1}(\overline{A})+P(B_2)\cdot P_{B_2}(\overline{A})=0,4\cdot 0,2+0,6\cdot 0,1=0,08+0,06=0,14$$

***Примечание**: данную вероятность легко найти, пользуясь результатом Задачи 5:*

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,86=0,14$$

Пусть событие $\overline{A}$ *произошло (извлечено нестандартное изделие).*

По формулам Байеса:

а) $P_{\overline{A}}(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0,4\cdot 0,2}{0,14}=\frac{0,08}{0,14}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}\approx 0,57$ *– вероятность того, что выбранное нестандартное изделие принадлежит 1-й партии;*

б) $P_{\overline{A}}(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0,6\cdot 0,1}{0,14}=\frac{0,06}{0,14}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}\approx 0,43$ *– вероятность того, что* *выбранное нестандартное изделие принадлежит 2-й партии.*

Ответ: а) $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$; б) $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$

Задача 8: ***Решение****: всего: 3 + 19 + 3 = 25 студентов в группе. По классическому определению:*

$p_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12$; $p_2 = \frac{19}{25} = 0{,}76$; $p_3 = \frac{3}{25} = 0{,}12$ *– вероятности того, что экзаменующийся студент имеет высокий, средний и низкий уровень подготовки соответственно.*

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}12 + 0{,}76 + 0{,}12 = 1$

По условию: $\tilde{p}_1 = 0{,}95$; $\tilde{p}_2 = 0{,}7$; $\tilde{p}_3 = 0{,}4$ *– вероятности успешной сдачи экзамена для студентов соответствующих уровней подготовки.*

По формуле полной вероятности:

$$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = 0{,}12 \cdot 0{,}95 + 0{,}76 \cdot 0{,}7 + 0{,}12 \cdot 0{,}4 =$$

$= 0{,}114 + 0{,}532 + 0{,}048 = 0{,}694$ *– вероятность того, что произвольно выбранный студент сдаст экзамен.*

Пусть студент сдал экзамен. По формулам Байеса:

а) $p_1^* = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \frac{0{,}114}{0{,}694} = \frac{114}{694} = \frac{57}{347} \approx 0{,}16$ *– вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен очень хорошо. Объективная исходная вероятность* $p_1 = 0{,}12$ *оказывается завышенной, поскольку почти всегда некоторым «середнячкам» везёт с вопросами и они отвечают очень сильно, что вызывает ошибочное впечатление безупречной подготовки.*

б) $p_2^* = \frac{p_2\tilde{p}_2}{p} = \frac{0{,}532}{0{,}694} = \frac{532}{694} = \frac{266}{347} \approx 0{,}77$ *– вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен средне. Исходная вероятность* $p_2 = 0{,}76$ *оказывается чуть завышенной, т.к. студентов со средним уровнем подготовки обычно большинство, кроме того, сюда преподаватель отнесёт неудачно ответивших «отличников», а изредка и плохо успевающего студента, которому крупно повезло с билетом.*

в) $p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{0{,}048}{0{,}694} = \frac{48}{694} = \frac{24}{347} \approx 0{,}07$ *– вероятность того, что студент, сдавший экзамен, был подготовлен плохо. Исходная вероятность* $p_3 = \frac{3}{25} = 0{,}12$ *переоценилась в худшую сторону. Неудивительно.*

Проверка: $p_1^* + p_2^* + p_3^* = \frac{57}{347} + \frac{266}{347} + \frac{24}{347} = \frac{347}{347} = 1$

Ответ: а) $\frac{57}{347} \approx 0{,}16$; б) $\frac{266}{347} \approx 0{,}77$; в) $\frac{24}{347} \approx 0{,}07$

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ И СПОРТА
МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«УЧИЛИЩЕ (ТЕХНИКУМ) ОЛИМПИЙСКОГО РЕЗЕРВА №4»

РЕФЕРАТ

по дисциплине: « Математика»

на тему: «*Указать тему реферата*»

ВЫПОЛНИЛ:
студент группы (*указать группу*)
Фамилия, имя (в Род.п.)

РУКОВОДИТЕЛЬ:
преподаватель Полянцева А.Н.

го Чехов, 2019 г.

Приложение 2

Содержание

Приложение 3

Список используемой литературы

1. С.Г.Григорьев; С.Иволгин «Математика». Учебник» Academia , Москва, 2015г

2.Профессиональные печатные издания

3.Интернет-ресурс

4.Дополнительные источники:….

Методические рекомендации по составлению презентаций

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

название презентации;

автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);

год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	– необходимо соблюдать единый стиль оформления; – нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; – вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	– для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	– на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; – для фона и текста используются контрастные цвета; – особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	– нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; – не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	– следует использовать короткие слова и предложения; – времена глаголов должно быть везде одинаковым; – следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; – заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации	– предпочтительно горизонтальное расположение

на странице	информации; – наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; – если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней
Шрифты	– для заголовков не менее 24; – для остальной информации не менее 18; – шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; – нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; – для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; – нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: – рамки, границы, заливку – разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки – рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	– не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. – наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

Критерии оценки презентации

Критерии оценки	Содержание оценки
1. Содержательный критерий	правильный выбор темы, знание предмета и свободное владение текстом, грамотное использование научной терминологии, импровизация, речевой этикет
2. Логический критерий	стройное логико-композиционное построение речи, доказательность, аргументированность
3. Речевой критерий	использование языковых (метафоры, фразеологизмы, пословицы, поговорки и т.д.) и неязыковых (поза, манеры и пр.) средств выразительности; фонетическая организация речи, правильность ударения, четкая дикция, логические ударения и пр.

4. Психологический критерий	взаимодействие с аудиторией (прямая и обратная связь), знание и учет законов восприятия речи, использование различных приемов привлечения и активизации внимания
5. Критерий соблюдения дизайн-эргономических требований к компьютерной презентации	соблюдены требования к первому и последним слайдам, прослеживается обоснованная последовательность слайдов и информации на слайдах, необходимое и достаточное количество фото- и видеоматериалов, учет особенностей восприятия графической (иллюстративной) информации, корректное сочетание фона и графики, дизайн презентации не противоречит ее содержанию, грамотное соотнесение устного выступления и компьютерного сопровождения, общее впечатление от мультимедийной презентации

Критерии оценивания практических заданий

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения практических работ производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно